Problème sur 12 points.

On note E l'ensemble des fonctions polynômes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On munit E de la norme $\| \quad \|_\infty$ définie par :

$$\forall f \in E,\ \| f \|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| .$$

On considère l'application φ définie par $\left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & F \end{array} \right.$ telle que :

$$F' = f \ \text{ et } \ \int_0^1 F(t)\, dt = 0.$$

(F' désigne l'application dérivée de F.)

Première partie.

1) a) Vérifier que φ est une application de E dans E.

b) Montrer que φ est une application linéaire.

2) a) Montrer que l'ensemble des réels de la forme $\dfrac{\| \varphi(f) \|_\infty}{\| f \|_\infty}$, pour $f \in E \setminus \{0\}$, est non vide majoré. On notera $N(\varphi) = \sup\limits_{f \in E \setminus \{0\}} \dfrac{\| \varphi(f) \|_\infty}{\| f \|_\infty}$.

b) Soit f un élément de E et F son image par φ, on appelle G la primitive de F qui s'annule en 0.

α) Exprimer $G(0)$ en fonction de $G(x)$ à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, appliquée à l'ordre 2.

β) Exprimer $G(1)$ en fonction de $G(x)$ à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, appliquée à l'ordre 2.

γ) En déduire que, pour tout x du segment $[0,1]$:

$$|F(x)| \leqslant \left(\frac{(1-x)^2 + x^2}{2} \right) \| f \|_\infty .$$

δ) Calculer $N(\varphi)$.

Deuxième partie.

On définit la suite $(P_n)_{n \geqslant 0}$ de fonctions polynômes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\left\{ \begin{array}{c} P_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1} = \varphi(P_n) \end{array} \right.$$

1) Déterminer P_1, P_2 et P_3.

2) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $P_n(0) = P_n(1)$.

3) Montrer par récurrence, que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=1}^{n+1} \frac{P_{n+1-k}(x)}{k!} = \frac{x^n}{n!}\ .$$

4) En utilisant la première partie, montrer que, pour tout entier naturel n, $\| P_n \|_\infty \leqslant \frac{1}{2^n}$.

5) Dans cette question, x désigne un nombre réel fixé appartenant à l'intervalle $[0, 1]$.

   a) Montrer que, la série entière $\sum P_n(x)\, t^n$ a un rayon de convergence $R(x)$ non nul, fini ou infini.

   b) Calculer, pour $t \in]-R(x), R(x)[$, le produit $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x)\, t^n\right)(e^t - 1)$.

   c) En déduire la somme de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x)\, t^n$ pour $t \in]-R(x), R(x)[$.

Troisième partie.

Soit g une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞. Pour tout entier naturel k, on définit le réel I_k par :

$$I_k = (-1)^k \int_0^1 g^{(k)}(t)\, P_k(t)\, dt$$

où $g^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième de g et (P_k) désigne la suite de fonctions polynômes définie dans la deuxième partie.

1) a) Trouver une relation de récurrence entre I_k et I_{k-1} pour tout entier naturel k non nul.

   b) Déduire de la question précédente que, pour tout entier naturel m supérieur ou égal à 2 on a :

$$I_m = I_1 + \sum_{k=2}^{m} (-1)^k P_k(0) \left[g^{(k-1)}(1) - g^{(k-1)}(0)\right].$$

   c) Exprimer I_1 à l'aide de la fonction g.

   d) En déduire une expression de $\int_0^1 g(t)\, dt$ faisant intervenir g ainsi que ses dérivées et la suite de fonctions polynômes (P_k).

2) Soit h une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞ et n un entier naturel non nul, on définit le réel U_n par l'égalité suivante :

$$U_n = \sum_{\ell=1}^{n} h(\ell) - \int_0^n h(t)\, dt.$$

a) Vérifier que : $U_n = \sum_{\ell=1}^{n} \int_{\ell-1}^{\ell} (h(\ell) - h(t))\, dt$.

b) Montrer que pour tout entier naturel ℓ compris entre 1 et n, il existe une application g_ℓ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞ vérifiant :

$$\int_{\ell-1}^{\ell} (h(\ell) - h(t))\, dt = \int_0^1 g_\ell(u)\, du.$$

c) En déduire, à l'aide de la question 1 de la troisième partie, une expression de U_n faisant intervenir la fonction h ainsi que ses dérivées et la suite de fonctions polynômes (P_k) .

Exercice sur 8 points.

Dans tout l'exercice n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes, $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ est l'ensemble des formes linéaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$.
À toute forme linéaire non nulle u de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$, on associe l'application linéaire F_u de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans lui-même définie par :

$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \xrightarrow{F_u} & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ A & \longmapsto & {}^tA + u(A)\, I_n \end{array}\right.$$

où ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A et I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1) On définit l'application G par :

$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \xrightarrow{G} & \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \mathbb{C}) \\ M & \longmapsto & G(M) \end{array}\right.$$

avec $G(M)(X) = \operatorname{tr}(MX)$ pour toute matrice X de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
($\operatorname{tr}(MX)$ désigne la trace de la matrice MX.)

Montrer que l'application G est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \mathbb{C})$. On notera M l'unique antécédent de la forme linéaire non nulle u par l'application G.

2) On appelle φ l'application définie par :

$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ A & \longmapsto & {}^tA \end{array}\right.$$

Montrer que φ est diagonalisable, on précisera son spectre et ses sous-espaces propres.

3) On considère une forme linéaire u non nulle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on désigne par ψ l'application définie par :

$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ A & \longmapsto & u(A)\, I_n \end{array}\right.$$

a) Montrer qu'il existe une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que, pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$\psi(A) = \operatorname{tr}(AM)\, I_n.$$

b) Déterminer le rang de l'application ψ.

c) Déterminer $\psi \circ \psi$ en fonction de ψ et de $\operatorname{tr}(M)$.

d) Montrer que si $\operatorname{Ker}\psi \cap \operatorname{Im}\psi = \{0\}$ alors ψ est diagonalisable et $\operatorname{tr}M \neq 0$.

e) Montrer que si $\operatorname{Ker}\psi \cap \operatorname{Im}\psi \neq \{0\}$ alors $\operatorname{tr}M = 0$.

f) En déduire que ψ est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{tr}M \neq 0$.

4) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la matrice M pour que :

$$\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi.$$

5) On suppose dans cette question $\begin{cases} \mathrm{tr}M \neq 0 \\ {}^tM = M \end{cases}$. On appelle $S_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n, symétriques, à coefficients complexes. On appelle $A_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n, antisymétriques, à coefficients complexes.

a) Montrer que :

$$\dim\left(S_n(\mathbb{C}) \cap \mathrm{Ker}\,\psi\right) = \frac{n(n+1)}{2} - 1.$$

b) Montrer que : $S_n(\mathbb{C}) = Vect(I_n) \oplus \left(S_n(\mathbb{C}) \cap \mathrm{Ker}\,\psi\right)$.

c) Déterminer $A_n(\mathbb{C}) \cap \mathrm{Ker}\,\psi$.

d) En déduire que l'endomorphisme F_u est diagonalisable, on précisera ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.

6) On suppose dans cette question $\begin{cases} M \neq 0 \\ \mathrm{tr}M = 0 \\ {}^tM = M \end{cases}$.

a) Montrer que $\mathrm{Ker}\,\psi$ est stable par l'endomorphisme φ, en déduire que :

$$\mathrm{Ker}\,\psi = \left(S_n(\mathbb{C}) \cap \mathrm{Ker}\,\psi\right) \oplus \left(A_n(\mathbb{C}) \cap \mathrm{Ker}\,\psi\right).$$

b) Montrer qu'il existe une matrice X_0 appartenant à $S_n(\mathbb{C})$ telle que $\psi(X_0) = I_n$.

c) En déduire qu'il existe une base B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que la matrice de F_u dans la base B soit de la forme $\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}$ où

$$U \in \mathcal{M}_{\frac{n(n+1)}{2}}(\mathbb{C}) \text{ avec } U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$V \in \mathcal{M}_{\frac{n(n-1)}{2}}(\mathbb{C}) \text{ avec } V = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
